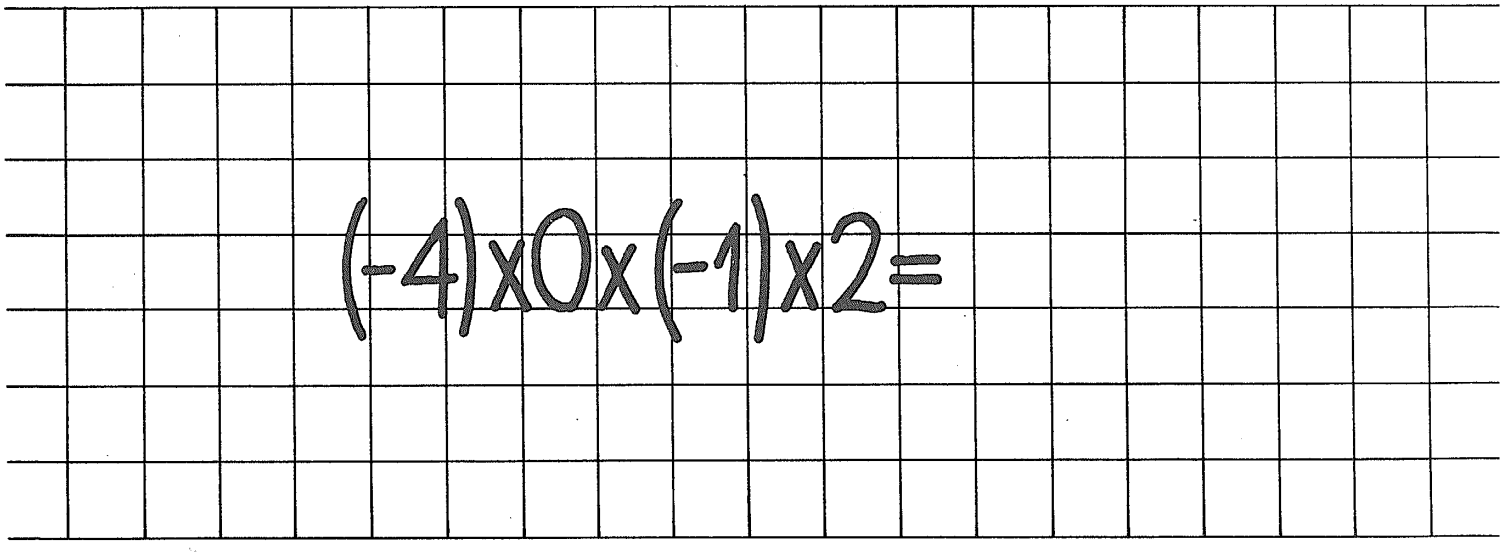
OPERACIONES CON ENTEROS

Obras que integran el bloque 1 *(Álgebra. Estructuras y operaciones)*

1. Conjuntos
2. Estructuras matemáticas
3. El conjunto de los enteros
4. ***Operaciones con enteros***
5. Lenguaje algebraico 1. Formación
6. Lenguaje algebraico 2. Transformación
7. Operaciones con polinomios 1. Suma, resta, multiplicación y división
8. Operaciones con polinomios 2. Productos notables
9. Operaciones con polinomios 3. Factorización
10. El conjunto de los racionales
11. Operaciones con expresiones racionales
12. El conjunto de los reales
13. Operaciones con expresiones reales
14. El conjunto de los complejos. Estructura y operaciones

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 1

Álgebra. Estructuras y operaciones

Módulo 4

OPERACIONES CON ENTEROS

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia,
España, Puerto Rico, Venezuela

Esta obra se terminó de imprimir
el día 12 de abril de 1985,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO ET KC 100

Revisión técnica: *Myriam P. Acuña Monsalve*
Licenciada en economía,
Universidad Nacional
Autónoma de México

La presentación y disposición en conjunto de
OPERACIONES CON ENTEROS
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación, o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
©1985, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya,
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, abril 1985
ISBN 968-24-1504-7

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquellos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

4.1 Práctica de adición en $\mathbb{Z}$ 9

4.2 Resta o sustracción en $\mathbb{Z}$ 29

4.3 Signos de agrupación 41

4.4 Práctica de multiplicación en $\mathbb{Z}$ 46

4.5 La suma y la multiplicación combinadas en $\mathbb{Z}$ 58

4.6 La división en $\mathbb{Z}$ 63

4.7 Múltiplo y mínimo común múltiplo 87

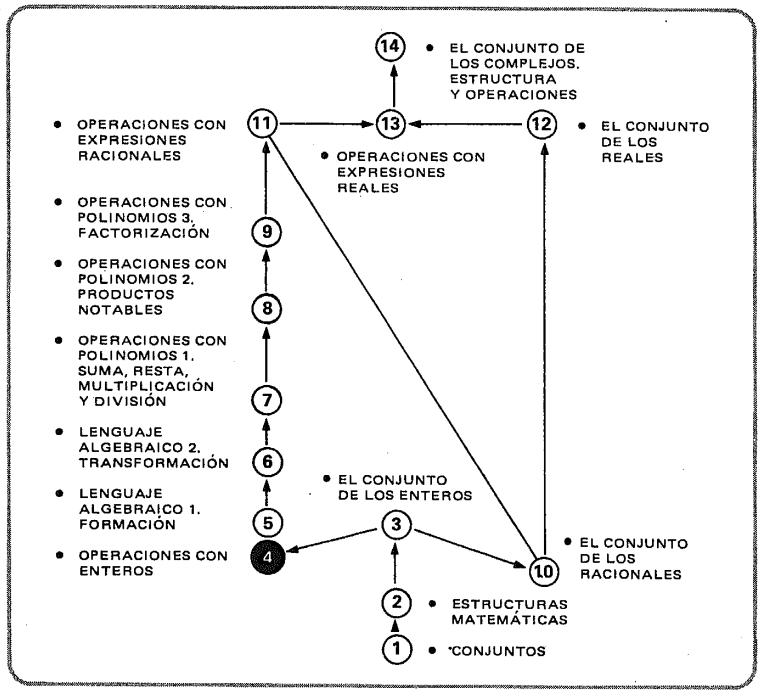
4.8 Potenciación y radicación en $\mathbb{Z}$ 100

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 1. Álgebra. Estructuras y operaciones

Objetivos: establecer las estructuras matemáticas relacionadas con los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos. Efectuar las cuatro operaciones binarias fundamentales y las operaciones monarias de potenciación y radicación con expresiones algebraicas pertenecientes a cada uno de los cinco conjuntos mencionados

Esquema estructural del bloque 1



Módulo 4. Operaciones con enteros

Objetivos: efectuar operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación o radicación con números enteros, y determinar el máximo común divisor o el mínimo común múltiplo de dos o más naturales

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Propiedades de las operaciones binarias: clausura, asociatividad, existencia de elementos neutro e inversos, conmutatividad y distributividad	1	2
• Nociones de las estructuras matemáticas con una o dos leyes de composición interna	1	2
• Concepto de número entero	1	3

4.1

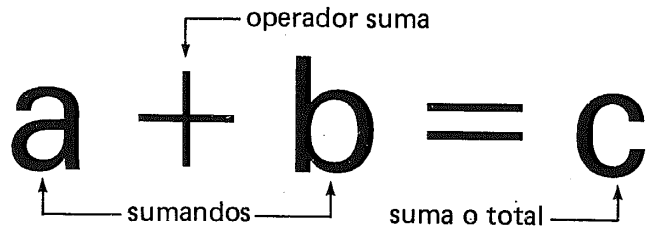
Práctica de adición en $\mathbb{Z}$

1

Hemos visto cómo la

suma o adición en $\mathbb{Z}$

puede representarse así:



$a,b,c \in \mathbb{Z}$

2

recordemos las propiedades o

reglas del juego

de la

suma o adición

en el conjunto de los

enteros.

3

$(\mathbb{Z}, +)$

es una
estructura
llamada

grupo abeliano

que cumple con las propiedades
dadas en los siguientes cuadros.

4

Cerradura o clausura

La suma o adición

está definida

en el conjunto de los enteros.
En

$$a + b = c$$

si $a, b \in \mathbb{Z}$,
entonces $c \in \mathbb{Z}$.

5

Asociatividad

Los sumandos
pueden ser

agrupados o **asociados**

en cualquier forma,*
sin que se altere el resultado.
Esto puede expresarse así:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

*Observamos que el orden de los sumandos se conserva,
pero estos pueden agruparse de diferente manera.

6

Puesto que

$$\boxed{(a + b) + c = a + (b + c)}$$

podemos escribir:

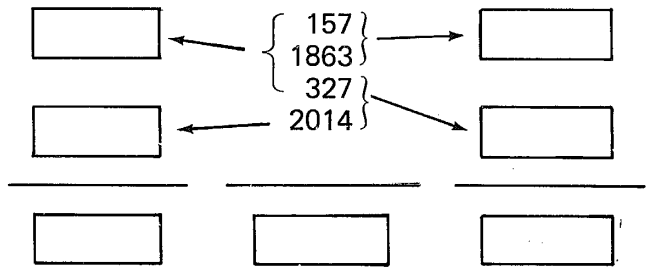
$$\boxed{a + b + c \text{ (sin paréntesis)}}$$

y también:

$$\boxed{a + b + c + d + e + \ldots}$$

7

Por ejemplo, efectuemos la suma siguiente en las tres formas sugeridas:



$$\begin{array}{ccc} & \left\{\begin{array}{r} 157 \\ 1863 \end{array}\right\} & \\ 2347 & & 2020 \\ & \left\{\begin{array}{r} 327 \\ 2014 \end{array}\right\} & \\ \underline{2014} & & \underline{2341} \\ 4361 & 4361 & 4361 \end{array}$$

8

Existencia de elemento neutro o de identidad

La podemos expresar así:

$$\boxed{a + 0 = a}$$

para todo $a \in \mathbb{Z}$

9

Existencia de elementos inversos para todos los elementos de $\mathbb{Z}$

Así, para todo $a \in \mathbb{Z}$:

$$a + \underbrace{(-a)}_{\text{inverso aditivo o simétrico de } (a)} = 0$$

10

Conmutatividad

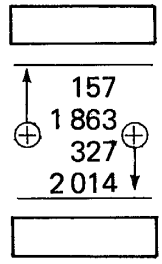
$$\boxed{a + b = b + a}$$

para todo $a, b \in \mathbb{Z}$

Esta propiedad nos permite cambiar el orden de los sumandos sin que se altere el resultado.

11

Efectuemos la siguiente suma en las dos formas sugeridas, haciendo uso de la conmutatividad y de lo expuesto en el cuadro 6.



$$\begin{array}{r} 4\,361 \\ \hline 157 \\ +\ 1\,863 \\ 327 \\ \hline 2\,014 \\ \hline 4\,361 \end{array} +$$

12

Vamos a resumir las propiedades estudiadas,

de la suma de enteros:

Para todo a, b, c $\in \mathbb{Z}$

1. $(a+b) \in \mathbb{Z}$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $a + 0 = 0 + a = a$
4. $a + (-a) = a - a = 0$
5. $a + b = b + a$

13

Recordemos también

las cuatro **reglas**

para la suma de enteros.

- $a + b = |a| + |b|$ si **a** y **b** son ambos no negativos
- $a + b = -(|a| + |b|)$ si **a** y **b** son ambos negativos
- $a + b = |a| - |b|$ si $|a| \geq |b|$ y **a** es positivo y **b** es negativo
- $a + b = -(|a| - |b|)$ si $|a| > |b|$ y **a** es negativo y **b** es positivo

Estas expresiones pueden ser dadas en la forma de dos reglas prácticas de fácil uso. (Véanse cuadros siguientes.)

14

Estudiar con atención las siguientes

reglas prácticas para la suma de enteros.

1. Si los sumandos tienen el mismo signo, se suman sus valores absolutos y se les da el signo que tienen.

   Por ejemplo:

$$4+7 = 11$$
$$(-4)+(-7) = -4-7 = -11$$

15

2. Si los sumandos tienen signo contrario, se restan sus valores absolutos (el menor del mayor) y se da al resultado el signo del mayor.

   Por ejemplo:

   $7+(-4) = \quad 7-4 = \quad 3$
   $(-7)+4 = -7+4 = -3$

16

$7 + 3 = 10$

17

$7 - 3 = \square$

Esta es expresión simplificada de $7 + (-3)$.

4

18

$3 - 7 = \square$

Expresión simplificada de $3 + (-7)$

-4

19

$-5 - 4 = \square$

Expresión simplificada de $-5 + (-4)$

-9

20

$-35 + 40 = \square$

Expresión simplificada de $(-35) + 40$

5

21

$-27-13=$ ____

Expresión simplificada de ____

-40

$(-27)+(-13)$

22

$25+(-10)$

____ = ____

Expresión simplificada

$25-10=15$

23

$87+(-8)$

____ = ____

Expresión simplificada

$-8=79$

24

$-15+(-15)$

$\underline{\qquad\qquad}=\underline{\qquad\qquad}$

Expresión simplificada

$-15-15=-30$

25

$-57+(-18)$

$\underline{\qquad\qquad}=\underline{\qquad\qquad}$

Expresión simplificada

$-57-18=-75$

26

$-18-5=\underline{\qquad\qquad}$

-23

27

$-15-18-23=$ [_____]

-56

28

$-105-15-85=$ [_____]

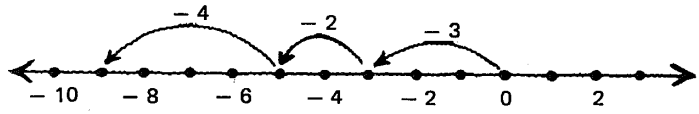
-205

1.4.1.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

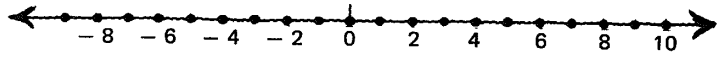
29

En la gráfica de $\mathbb{Z}$:



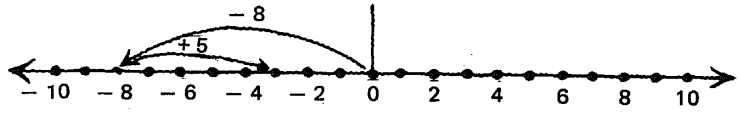
$-3-2-4=-9$

30



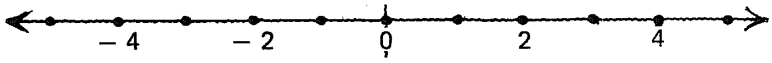
$-8+5=$ _____

Respuesta en el cuadro siguiente

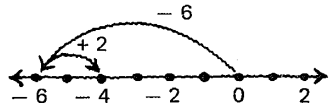


$-8+5=-3$

31

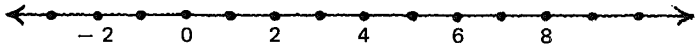


– 6 + 2 = ____

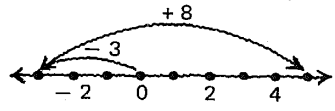


– 6 + 2 = – 4

32

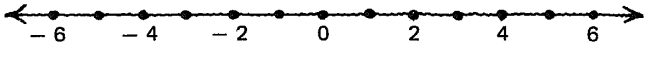


– 3 + 8 = ____

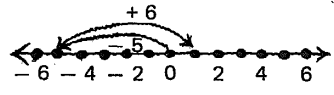


– 3 + 8 = 5

33



– 5 + 6 = ____



– 5 + 6 = 1

34

$13 - 25 - 10 =$ ⌊_____⌋

-22

35

$-5-7-13+4 =$ ⌊_____⌋

$\underbrace{-5-7-13}+4 =$

$-25+4 = -21$

36

$-6+7-3-1 =$ ⌊_____⌋

$-10+7 = -3$

37

$140 - 75 + 10 =$ ⌊_____⌋

$150 - 75 = 75$

38

$-1 + 1 - 1 - 1 =$ ⌊_____⌋

$-3 + 1 = -2$

39

$-8 + 5 - 3 + 4 =$ ⌊_____⌋

$-11 + 9 = -2$

40

$10 - 5+5 =$ ⌊_____⌋

$10 - \underbrace{5+5}_{0} =$

$10+0 = 10$

41

No debemos olvidar que:

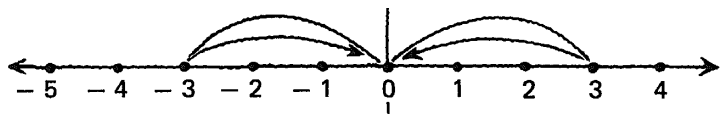
$$\left.\begin{array}{l} a - a \\ -a+a \\ a+(-a) \end{array}\right\} = 0$$

elemento neutro de la suma

suma de inversos o simétricos

42

Suma de simétricos o inversos aditivos en la gráfica de $\mathbb{Z}$.



$a+(-a) = a - a = -a+a = 0$

43

$15+7-7=$ ⌊_____⌋

15

puesto que $7-7=0$

44

$-6+21+6=$ ⌊_____⌋

21

$(-6+6=0)$

45

$-8+9-3-9=$ ⌊_____⌋

-11

$(9-9=0)$

1.4.1.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

46

Los **signos de agrupación**

pueden ser utilizados **para indicar el orden**
en que las operaciones han de ser ejecutadas.
Así, a través de la expresión:

$(a+b)+c$

debemos entender que
la suma [ ]
debe ser efectuada en primer lugar.

$a+b$

47

$5+(-7-2) =$ [ ]

$5+(-9)$

$=5-9=-4$

48

$(-7+10)+3=$ ＿＿＿＿＿＿

$3+3=6$

49

$(-3+13)+(-7-6)=$ ＿＿＿＿＿＿

$10+(-13)$

$=10-13=-3$

50

$-18+(2-10)=$ ＿＿＿＿＿＿

$-18+(-8)$

$=-18-8=-26$

51

$14 + (-7 - 7) =$ ＿＿＿＿＿＿

$14 + (-14)$

$= 14 - 14 = 0$

52

$(10 + 10) + (-10 - 10) =$ ＿＿＿＿＿＿

$20 + (-20)$

$= 20 - 20 = 0$

53

$21 + (-8 + 3) =$ ＿＿＿＿＿＿

$21 + (-5)$

$= 21 - 5 = 16$

54

$-(-1-1)+(-1+1) =$ ____

$-(-2)+0$

$=2+0=2$

1.4.1.3

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.4.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *efectuar* operaciones de suma o adición de enteros.

4.2

Resta o sustracción en $\mathbb{Z}$

55

La

resta o **sustracción** en $\mathbb{Z}$

está representada por:

operador diferencia

$$a - b = c$$

minuendo — sustraendo — diferencia

$a,b,c \in \mathbb{Z}$

56

Debemos recordar
las propiedades

(reglas del juego)

de la

resta o **sustracción**

en el
conjunto
de los

enteros.

57

Cerradura o clausura

La resta o sustracción

está definida

en el conjunto de los enteros.
En:

$$a - b = c$$

si $a, b \in \mathbb{Z}$
entonces $c \in \mathbb{Z}$

58

Asociatividad

La resta o sustracción **NO** es una operación asociativa

59

Ejemplo:

$(12 - 5) - 3$ $\quad$ $12 - (5 - 3)$

$\square = \square$ $\quad$ $\square = \square$

Expresiones simplificadas

- $(12 - 5) - 3 =$

  $7 - 3 = 4$

- $12 - (5 - 3)$

  $12 - 2 = 10$

$4 \neq 10$

60

Existencia de elemento neutro o de identidad (el cero).

Para todo $a \in \mathbb{Z}$ se verifica que:

$$a - 0 = a$$

61

Existencia de inversos para todos los elementos de $\mathbb{Z}$

$$a - a = 0$$

para todo $a \in \mathbb{Z}$

Cada elemento es **inverso sustractivo** de sí mismo.

62

Conmutatividad

La sustracción **NO** es conmutativa.
Deberá siempre estar claramente establecido cuál es el **minuendo** y cuál el **sustraendo.**

63

Ejemplo:

$7 - 5 = \square$

$5 - 7 = \square$

2

-2

$2 \neq -2$

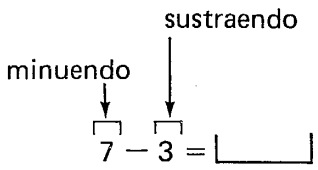
64

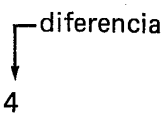
Resumen de las **propiedades de la resta o sustracción en** $\mathbb{Z}$.

Para todo $a,b \in \mathbb{Z}$

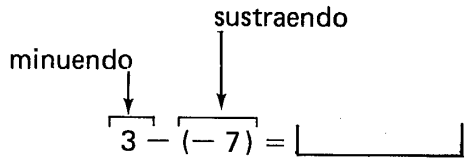
1. $(a - b) \in \mathbb{Z}$
2. La resta no es asociativa.
3. $a - 0 = a$
4. $a - a = 0$
5. La resta no es conmutativa.

65



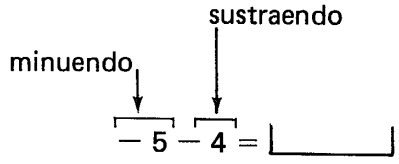


66



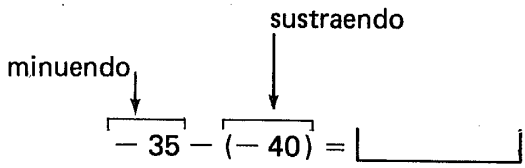
3 + 7 = 10

67



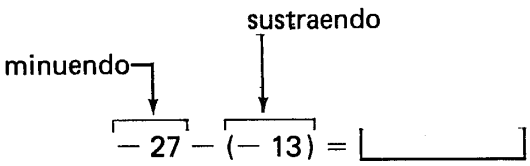
− 9

68



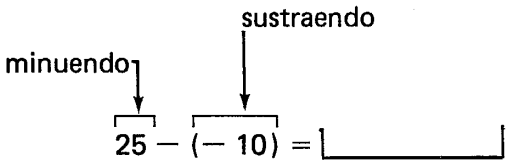
− 35 + 40 = 5

69



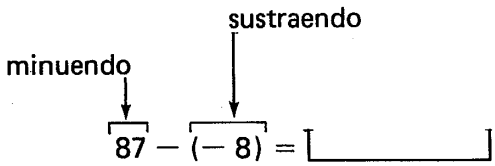
− 27 + 13 = − 14

70



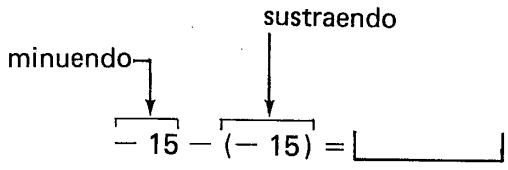
25 + 10 = 35

71



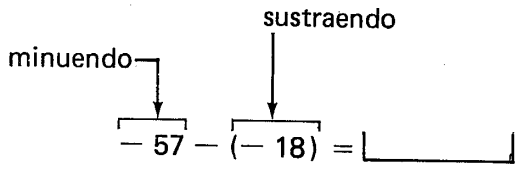
87 + 8 = 95

72



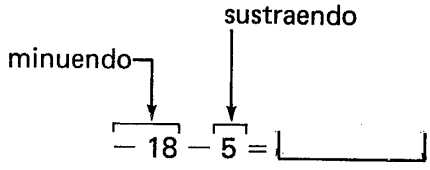
$-15+15=0$

73



$-57+18=-39$

74



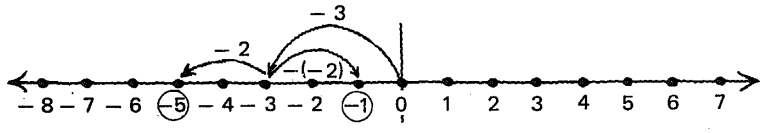
-23

1.4.2.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

75

En la gráfica de $\mathbb{Z}$:

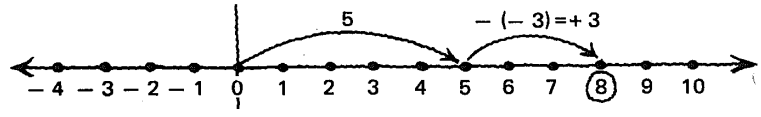


$-3-2=-5$

$-3-(-2)=-3+2=-1$

76

Otro ejemplo de sustracción o resta en la gráfica de $\mathbb{Z}$:



$5-(-3)=5+3=8$

77

Ahora bien, hemos venido observando que:

$$\boxed{a - b = a + (-b)}$$

- *restar* b equivale a *sumar* $-$ b

En esta forma,

la resta queda **definida**

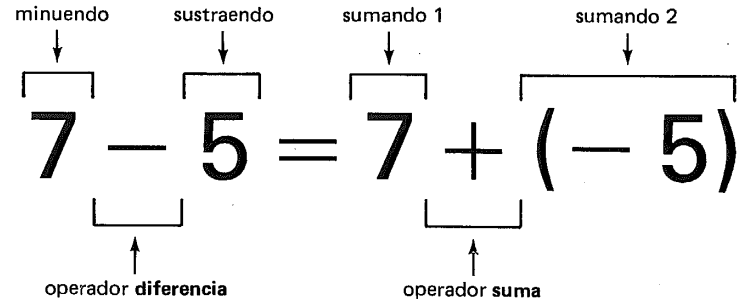
como la **operación inversa**

de la

adición.

78

Estudiar con mucha atención.



así interpretada, la operación a la que se suele dar el nombre de **"suma algebraica"**, cumple con todas las propiedades de la suma o adición estudiadas.

79

$$\boxed{7 - 5 = 7 + (-5)}$$

Debemos observar que: $\boxed{7 - 5 \neq 5 - 7}$

Pero: $\boxed{7 - 5 = -5 + 7}$

Es decir:

NO se cumple la **conmutatividad** para la resta.

SI se cumple la **conmutatividad** para la llamada **suma algebraica.**

80

$10 - 3 = -3 + 10$

V/F

V

81

$10 - 3 = 3 - 10$

V/F

F

82

$-5 - 8 = -8 - 5$

V/F

V

83

$-3-4-2-1=-1-2-4-3$

V/F

V

84

$-10+(-4)=-4-10$

V/F

V

85

$-15-8=8-15$

V/F

F

1.4.2.2

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.4.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *efectuar* operaciones de resta o sustracción de enteros;
- *interpretar* la resta o sustracción de enteros como una operación inversa de la suma o adición.

4.3

Signos de agrupación

86

Estos son los

signos de agrupación

que utilizaremos con mayor frecuencia:

- paréntesis ( )
- corchetes [ ]
- llaves { }
- vínculo ⌐¬

87

Por lo general,
suprimimos los signos de agrupación
de una expresión dada
para simplificarla.

88

Las reglas para la supresión
de los signos de agrupación
se deducen de
estas expresiones
que nos son ya familiares:

$+ (a) = a \qquad + (- a) = - a$

$- (a) = - a \qquad - (- a) = + a$

89

Reglas prácticas para la supresión de signos de agrupación

1. "Para suprimir paréntesis (o cualquier otro signo de agrupación), **precedidos de signo** +, se eliminan de la expresión junto con el signo que les precede, y se escriben los números afectados, conservando sus signos correspondientes".
   Ejemplos:

   $3 + (7 - 5) = 3 + 7 - 5$

   $- 2 + (- 3 - 2) = - 2 - 3 - 2$

90

2. "Para suprimir paréntesis (o cualquier otro signo de agrupación), **precedidos de signo** −, se eliminan de la expresión junto con el signo que les precede, y se escriben los números afectados, pero con signo contrario."
   Ejemplos:

   $3 - (7 - 5) = 3 - 7 + 5$

   $- 2 - (- 3 - 2) = - 2 + 3 + 2$

91

Cuando en una expresión ocurren varias categorías de signos de agrupación, como en el siguiente ejemplo, se procede a suprimirlos "de adentro hacia afuera".

Expresión dada: $1 - \{3+[-2-(5-1)]\}$

1. Supresión de paréntesis: $1 - \{3+[-2-5+1]\}$

2. Supresión de corchetes: $1 - \{3-2-5+1\}$

3. Supresión de llaves: $1-3+2+5-1$

92

Simplificar la expresión siguiente, por supresión de los signos de agrupación.

$$7+[5-(8-3)+3] = \underline{\qquad\qquad}$$

$7+[5-(8-3)+3] =$

$= 7+[5-8+3+3]$

$= 7+5-8+3+3$

$= 10$

93

$$-[(5-6)+7-(-4-7)]-1 = \underline{\qquad\qquad}$$

$-[(5-6)+7-(-4-7)]-1$

$= -[5-6+7+4+7]-1$

$= -5+6-7-4-7-1$

$= -18$

94

$$\{-5+[4-(-7+3)]-6\}$$

$$=\square$$

$$\{-5+[4-(-7+3)]-6\}$$
$$=\{-5+[4+7-3]-6\}$$
$$=\{-5+4+7-3-6\}$$
$$=-3$$

95

$$(3-5)-\{4+[5-(7-3)]-1\}$$

$$=\square$$

$$(3-5)-\{4+[5-(7-3)]-1\}$$
$$=3-5-\{4+[5-7+3]-1\}$$
$$=3-5-\{4+5-7+3-1\}$$
$$=3-5-4-5+7-3+1$$
$$=-6$$

96

$$\{6-\overline{5+[4-(6-1+4)]}-2\}$$

$$=\square$$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$$\{6 - \overline{5 + [4 - (6 - 1 + 4)]} - 2\}$$

$$= \{6 - \overline{5 + [4 - 6 + 1 - 4]} - 2\}$$

$$= \{6 - \overline{5 + 4 - 6 + 1 - 4} - 2\}$$

$$= \{6 - 5 - 4 + 6 - 1 + 4 - 2\}$$

$$= 6 - 5 - 4 + 6 - 1 + 4 - 2$$

$$= 4$$

1.4.3.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.4.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

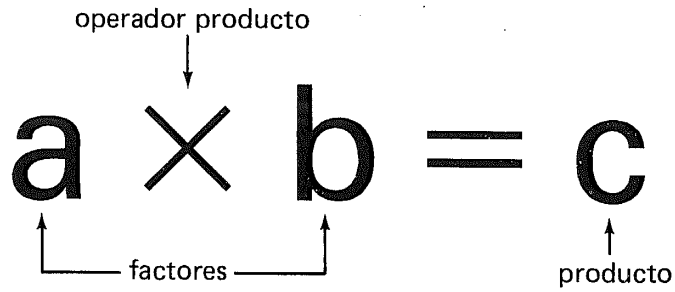
- *simplificar* expresiones enteras mediante la supresión de los signos de agrupación.

4.4

Práctica de multiplicación en $\mathbb{Z}$

97

La **multiplicación en** $\mathbb{Z}$ se representa así:



$a,b \in \mathbb{Z}$

98

Vamos a recordar
las propiedades

(reglas del juego)

de la

multiplicación

en el
conjunto
de los

enteros.

99

La expresión

$(\mathbb{Z}, X)$

representa
una estructura
llamada

monoide abeliano.

100

Cerradura o clausura

La multiplicación

está definida o **es cerrada**

en el conjunto de los enteros.
En

$a \times b = c$

si $a,b \in \mathbb{Z}$
entonces $c \in \mathbb{Z}$.

101

Asociatividad

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

Para todo $a, b, c \in \mathbb{Z}$

102

Puesto que

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

podemos escribir

$$a \times b \times c$$ (sin paréntesis)

Y también, para cualquier número de factores:

$$a \times b \times c \times d \times e \times \ldots$$

103

Efectuar la multiplicación siguiente,
en las dos formas sugeridas.

$$\square \times \square = \square$$

$$15 \times 4 \times 3 \times 2$$

$$\square \times \square = \square$$

$15 \times 24 = 360$

$60 \times 6 = 360$

104

Existencia de elemento neutro

$$a \times 1 = a$$

Para toda $a \in \mathbb{Z}$

105

No existen **inversos multiplicativos**

para todos los elementos de $\mathbb{Z}$.

$$a \times \underbrace{(?)}_{\text{inverso multiplicativo}} = 1$$

No se define en $\mathbb{Z}$ la operación inversa de la multiplicación.

106

Conmutatividad

Se cumple:

$$\boxed{a \times b = b \times a}$$

Esta propiedad nos permite cambiar el orden de los factores sin que se altere el producto.

107

Sabemos que,

por ejemplo:

$$5 \times 4 = 4 \times 5 = 20$$

108

En resumen, para $a,b,c \in \mathbb{Z}$:

1. $a \times b \in \mathbb{Z}$
2. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
3. $a \times 1 = 1 \times a = a$
4. $a \times b = b \times a$

109

Reglas para la multiplicación en $\mathbb{Z}$

- $a \times b = |a| \times |b|$ si **a** y **b** son ambos positivos o negativos, o si uno o ambos son nulos.
- $a \times b = -(|a| \times |b|)$ si **a** es positivo y **b** es negativo, o viceversa.

110

Tomemos nota de la siguiente regla práctica para manejo de los signos en la multiplicación.

×	+	−
+	+	−
−	−	+

111

$7 \times 5 = 5 \times 7 = \square$

35

112

$7 \times (-5) = \square$

-35

113

$(-7) \times 5 = \square$

-35

114

$(-7) \times (-5) = \square$

35

115

$4 \times 3 \times 5 = \square$

60

116

$(-4) \times 3 \times 5 = \square$

-60

117

$(-4) \times (-3) \times 5 = \underline{\quad}$

60

118

$(-7) \times (-1) \times (-3) = \underline{\quad}$

-21

119

$(-257) \times 1 = \underline{\quad}$

- -257

$(-257) \times 1 = -257$

No olvidemos que 1 es el elemento neutro o elemento de identidad de la multiplicación de enteros.

120

$(-257) \times (-1) = \square$

257

Observemos que al multiplicar por -1 obtenemos el simétrico o inverso aditivo.

121

$325 \times (-1) = \square$

-325

122

Ahora bien,

$87 \times 0 = \square$

0

Al 0 (cero) le llamamos elemento absorbente de la multiplicación.

123

$(-58) \times 0 =$ [ ]

0

124

$0 \times 0 =$ [ ]

0

125

$(-4) \times 0 \times (-1) \times 2 =$ [ ]

- 0

Basta que un factor sea **cero** para que el producto sea **cero.**

126

342 X⌊_⌋= 0

0

127

Tomemos nota de esta importante propiedad que habrá de sernos de utilidad más adelante.

Para que el producto de dos factores sea igual a cero se requiere que cuando menos uno de los dos factores sea igual a ⌊____⌋

cero

128

a X b = 0

Para que esto se verifique se requiere que:

a = ⌊____⌋ 0

o bien

b = ⌊____⌋ 0

o bien

a = b = ⌊____⌋ 0

129

$(-5) \times (-7) \times 8 \times (-1) =$ [ ]

-280

130

$10 \times (-3) \times (4) \times (-2) =$ [ ]

240

1.4.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *efectuar* operaciones de multiplicación de números enteros, con dos o más factores.

4.5

La suma y la multiplicación combinadas en $\mathbb{Z}$

131

Recordemos que la expresión

$(\mathbb{Z}, +, \times)$

representa una **estructura**

llamada:

anillo unitario conmutativo

132

No debemos olvidar
una
importante propiedad
de la

suma y multiplicación

combinadas,
en
el conjunto de los enteros.

Véase el cuadro siguiente.

133

Distributividad,
de la multiplicación
con respecto a la suma en $\mathbb{Z}$

$(a + b) \times c =$ ____

$a \times c + b \times c$

134

Distributividad de la multiplicación
con respecto a la suma, en $\mathbb{Z}$.

$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

A la derecha

Y a la izquierda

____

$c \times (a + b) = c \times a + c \times b$

135

Distributividad de la multiplicación
con respecto a la suma, en $\mathbb{Z}$.

$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$

A la derecha

$c \times (a + b) = c \times a + c \times b$

A la izquierda

136

A la derecha:

$(4 + 5) \times 3 =$ ⌊_____⌋

$(4 + 5) \times 3$

$= 4 \times 3 + 5 \times 3 =$

$= 12 + 15$

$= 27$

En efecto:

$(4 + 5) \times 3 = 9 \times 3 = 27$

137

A la izquierda:

$5 \times (7 - 10) =$ ⌊_____⌋

$5 \times (7 - 10)$

$= 5 \times 7 - 5 \times 10$

$= 35 - 50$

$= -15$

En efecto:

$5 \times (-3) = -15$

138

$(-7) \times (-1 + 4) =$ ⌊_____⌋

$(-7) \times (-1 + 4) =$

$= (-7) \times (-1) + (-7) \times 4$

$= 7 + (-28)$

$= 7 - 28 = -21$

En efecto:

$(-7) \times (3) = -21$

139

$(-8) \times (-5-3) =$ ____

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$(-8) \times (-5-3)$

$= (-8) \times (-5) + (-8) \times (-3)$

$= 40 + 24 = 64$

En efecto:

$(-8) \times (-8) = 64$

140

$(-3) \times (-4+5-1) =$ ____

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$(-3) \times (-4 + 5 - 1)$

$= (-3) \times (-4) + (-3) \times 5 + (-3) \times (-1)$

$= 12 + (-15) + 3$

$= 12 - 15 + 3 = 0$

En efecto:

$(-3) \times 0 = 0$

1.4.5.1

Práctica adicional,
si
se considera necesario.

1.4.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

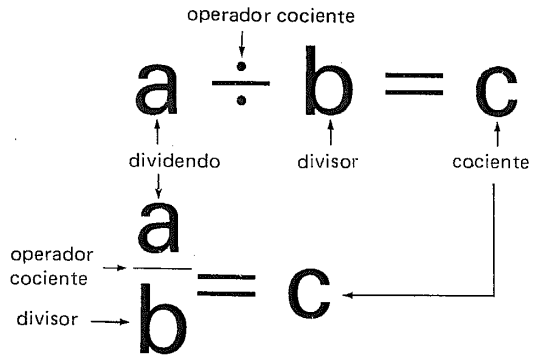
- *aplicar* la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, en el conjunto de los enteros.

4.6

La división en $\mathbb{Z}$

141

La división de enteros puede ser representada así:



142

Veamos

qué **propiedades**

se cumplen
para

la **división**

en $\mathbb{Z}$.

143

Clausura o cerradura

La división **NO** está definida en $\mathbb{Z}$.

Por ejemplo:

$7 \div 5 =$ ⌊_____⌋

no existe resultado en $\mathbb{Z}$

144

La operación se define

sólo

para algunos pares de números enteros.
Por ejemplo:

$12 \div 4 =$ ⌊___⌋

3

145

$12 \div 4 = 3$

En este caso,
decimos que

12 es **divisible** por 4

o bien, que

4 es **divisor*** de 12.

(*) Observemos el doble significado del término **divisor**.

146

$12 \div 4 = 3$

También
decimos que

4 es **factor** de 12

puesto que $12 = 4 \times 3$

factores

o bien, que

12 es **múltiplo** de 4

147

En resumen,

Decimos que:

si $12 \div 4 = 3$

- 12 es **divisible** por 4
- 12 es **múltiplo** de 4
- 4 es **divisor** de 12
- 4 es **factor** de 12

148

En general

Decimos que:

si $a \div b = c$

$a, b \in \mathbb{Z}$
$c \in \mathbb{Z}$

- a ⌊ b
- a ⌊ b
- b ⌊ a
- b ⌊ a

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Decimos que:

Si $a \div b = c$

$a, b \in \mathbb{Z}$
$c \in \mathbb{Z}$

- a es **divisible** por b
- a es **múltiplo** de b
- b es **divisor** de a
- b es **factor** de a

149

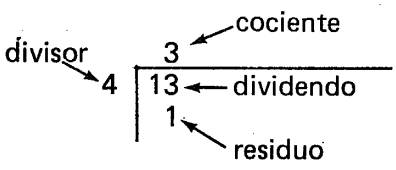
Ahora, efectuemos la división

dividendo

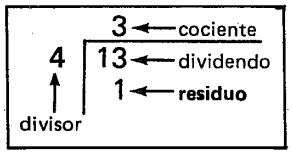
$13 \div 4$

divisor

en esta forma



150



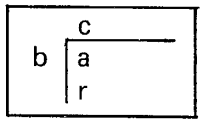
Observamos que:

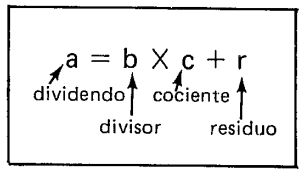
$13 = 4 \times 3 + 1$

dividendo, divisor, cociente, residuo

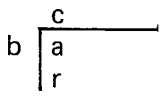
151

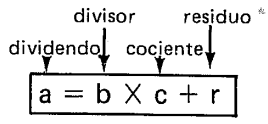
Queda, así, definida la **división entera:**





152





Observamos que:

r ⌊____⌋ b

> ó <

<

153

En

$$a = b \times c + r$$

si a es divisible por b

se verifica que

r = ⌊____⌋

0

154

Si ocurre que r = 0
en

$$a = b \times c + r,$$

decimos, también, que:

- a ⌊_____⌋ b
- b ⌊_____⌋ a
- b ⌊_____⌋ a

es **múltiplo** de

es **divisor** de

es **factor** de

155

Veamos, en los cuadros siguientes,

algo más sobre:

- **factores**
- **divisores**

y

- **múltiplos**

156

$12 \div 4 = 3$

$12 = 4 \times 3$

Decimos que:

4 y 3

son **factores** de 12

157

$12 = 4 \times 3$

En el segundo miembro:

- 12 está expresado como producto de los factores 4 y 3
- 12 está **factorizado**
- 12 está descompuesto en los factores 4 y 3

158

En

$12 = 4 \times 3$

observamos que el factor 4
puede ser, a su vez, descompuesto
en factores, así:

$4 =$ ⌊_____⌋

2×2

159

$12 = 4 \times 3$

pero

$4 = 2 \times 2$

Entonces,
por sustitución:

$12 =$ ⌊_____⌋

$2 \times 2 \times 3$

160

Hemos obtenido:

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

Por otra parte,
vemos que el factor 3
no puede ser descompuesto
más que en la forma:

$$3 = 3 \times 1$$

161

En

$$3 = 3 \times 1$$

3 y 1
reciben el nombre de

factores triviales.

Decimos que
3 puede ser descompuesto únicamente en
sus factores triviales: 3 y 1.

162

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

Tenemos, siguiendo con el proceso de factorización, que:

$2 =$ [_____]

• 2×1

2 puede ser descompuesto
únicamente en sus
dos factores triviales.

163

Y, ¿qué sucede con el 1?

1 = ⌊_____⌋

1 X 1 X 1 X 1 ...

un solo factor

164

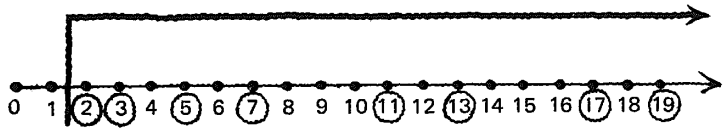
Los **enteros positivos** pueden clasificarse en tres grupos:

Enteros positivos que pueden ser descompuestos en ...		
... **UN** solo factor	... **DOS** factores triviales	... **DOS** o más factores
Ejemplo: Únicamente el 1	*Ejemplos:* 2,3,5,7 etc.	*Ejemplos:* 4,6,8,12 etc.

165

Los enteros positivos pueden ser descompuestos en ...		
... UN solo factor	... sus DOS factores triviales	... DOS o más factores
Ejemplo: Únicamente el 1	*Ejemplos:* 2,3,5,7 etc. A éstos se les llama: números **primos**	*Ejemplos:* 4,6,8,9,10,12 etc. Éstos son los llamados: números **compuestos**

166



Un **número primo (n)**

es, por lo tanto,
un entero mayor que 1,
que puede ser descompuesto
únicamente en sus **dos** factores triviales: 1 y n.

167

Un número entero mayor que 1
puede ser, entonces,

primo o compuesto.

168

De nuevo,
hagamos referencia a la expresión:

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

Afirmamos que:

12 está **descompuesto en factores primos**

o que:

12 está **totalmente factorizado**

169

Hay varias formas de **descomponer en factores** un número compuesto. He aquí un ejemplo:

$12 = 3 \times 4$

$12 = 6 \times 2$

No obstante, sólo hay una forma* de **descomponerlo en factores primos** o factorizarlo completamente:

$12 = 2 \times 2 \times 3$

* Si no se considera el orden.

170

$12 = 3 \times 4$

$12 = 6 \times 2$

$12 = 2 \times 2 \times 3$

Podemos decir que:

- 3 es **divisor** de 12
- 4 es **divisor** de 12
- 2 es **divisor** de 12
- 6 es **divisor** de 12

171

$12 = 3 \times 4$

$12 = 6 \times 2$

$12 = 2 \times 2 \times 3$

Podemos decir, también, que:

- 12 es **divisible** por 3 ya que $12 \div 3 = 4$
- 12 es **divisible** por 4 ya que $12 \div 4 = 3$
- 12 es **divisible** por 6 ya que $12 \div 6 = 2$
- 12 es **divisible** por 2 ya que $12 \div 2 = 6$

172

Además:

- 12 es divisible por 1
  ya que $12 \div 1 = 12$
  (divisor **trivial**)

- 12 es divisible por 12
  ya que $12 \div 12 = 1$
  (divisor **trivial**)

173

Un número primo n
únicamente es divisible
por

[_____]

1 y por n

(divisores triviales)

174

Por ejemplo,
el número primo 7
únicamente es divisible por

[_____]

1 y por 7

(divisores triviales de 7)

175

En cambio,

un **número compuesto**

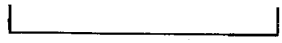
tiene, **por lo menos,**

un divisor adicional

a sus dos divisores triviales.

176

Por ejemplo,
en número compuesto 8
es divisible por



además
de serlo
por
1 y por 8 (divisores triviales).

2 y por 4

177

Nos damos cuenta
de que:

$$8 = 4 \times 2$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2$$

además, de que:

$$8 = 8 \times 1$$

178

Otro ejemplo:

El número compuesto 357 es divisible por 1 y por 357;
pero,
para encontrar los demás divisores es necesario que
recordemos algunas reglas para la **divisibilidad**
de un número dado en nuestro sistema decimal.

179

Principales reglas para la **divisibilidad**
en el sistema decimal de numeración:

Divisibilidad por 2

"Es divisible por 2,
todo entero cuya cifra correspondiente a las unidades sea
cualquiera de los dígitos
0,2,4,6,8."

180

Indicar cuáles números
son divisibles por **2.**

325	84	747	1200	
724	636	25	34	
1001	18	746	2	1

84
1200
724
636
34
18
746
2

181

Divisibilidad por 3

"Es divisible por 3,
todo entero
cuya suma de los valores absolutos
de sus cifras
sea divisible por 3."

182

Indicar cuáles números
son divisibles por 3.

725	336	408	36
1200	7401	926	539
27	427	84	1002

336
408
36
1200
7401
27
84
1002

183

Divisibilidad por 5

"Es divisible por 5,
todo entero
cuya cifra de las unidades
es
cualquiera de los dígitos
0 o 5."

184

Indicar cuáles números
son divisibles por 5.

125	107	250	35
87	346	25	100
2000	36	3	95

125
250
35
25
100
2000
95

185

Divisibilidad por 10

"Es divisible por 10,
todo entero
cuya cifra de las unidades
es
0."

186

Volvamos a nuestro ejemplo
de determinación de los **divisores no triviales**
de

357

y procedamos en la forma indicada en los
siguientes cuadros.

187

Primero, anotamos el número aquí:

357

Luego, trazamos una recta vertical.
Enseguida, respondemos a la siguiente pregunta:
¿357 es divisible por 2 (primero de los números primos)?

Sí/No

No

188

Ahora,

357

¿357 es divisible por 3 (segundo de los números primos)?

Sí/No

Sí

189

Como la respuesta es afirmativa, anotamos el divisor en este lugar: → 3

357

...y aquí → ⌊ ⌋ anotamos el resultado de la división 357 ÷ 3

119

190

357 119	3 Ahora, respondamos: ¿Es 119 divisible por 3? **Sí/No**

No

191

357 119	3 ¿119 es divisible por 5 (tercero de los números primos)? **Sí/No**

No

192

357 119	3 ¿119 es divisible por 7? Para saberlo, efectuamos la división correspondiente. **Sí/No**

$$\begin{array}{r|l} & 17 \\ 7 & 119 \\ & 49 \end{array}$$

0 = RESIDUO

Sí

193

357	3
119	7
17	17
1	

Siendo 17 un número primo, escribimos:

Divisor trivial 1 indicando fin del proceso.

17 es un número primo, por lo tanto, únicamente admite sus dos divisores triviales 1 y 17.

194

357	3
119	7
17	17
1	

Entonces, podemos escribir: $357 = 3 \times 7 \times 17$

Por lo tanto, además de los divisores triviales, 357 tiene como divisores:

- 3
- 7
- 17
- $3 \times 7 = 21$
- $3 \times 17 = 51$
- $17 \times 7 = 119$

195

Podemos representar en la siguiente forma

el **conjunto de los divisores de 357:**

$$D_{357} = \{1,3,7,17,21,51,119,357\}$$

divisores triviales

1.4.6.1

Práctica
de
descomposición factorial
y determinación del conjunto
de los divisores de un
número compuesto,
si se considera necesario.

196

Ahora bien,
sean 60 y 24 dos números compuestos.
Escribamos el conjunto de los divisores de 60:

└──────────────────────────┘

y el conjunto de los divisores de 24:

└──────────────────────────┘

Respuesta
en el
cuadro siguiente

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$
$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

Conjunto ordenado de los divisores de 60:

$$D_{60} = \{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$$

Conjunto ordenado de los divisores de 24:

$$D_{24} = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$$

197

$D_{60} = \{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$

$D_{24} = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

Determinemos la intersección de estos dos conjuntos, escribiendo sus elementos en forma ordenada:

$D_{60} \cap D_{24} =$ [_____]

Respuesta
en el
cuadro siguiente

El conjunto ordenado de los divisores comunes de 60 y 24 es:

$D_{60} \cap D_{24} = \{1,2,3,4,6,12\}$

Llamamos a 12:

Máximo Común Divisor (MCD)

o

Máximo Factor Común de 60 y 24.

198

El máximo común divisor

MCD

o máximo factor común
de dos números
es el
último elemento del conjunto ordenado
de los divisores comunes de los dos números.

199

Aquí se muestra un procedimiento rápido para obtener el MCD (máximo común divisor o máximo factor común) de dos números.

Descomposición factorial de 60

60	②
30	②
15	③
5	5
1	

Descomposición factorial de 24

24	②
12	②
6	2
3	③
1	

MCD = MFC = 2 × 2 × 3 = (12)

Producto de factores comunes de 60 y 24

200

Ejemplo de obtención del MCD de tres números.

25	5
5	⑤
1	

15	3
5	⑤
1	

35	⑤
7	7
1	

MCD = MFC = 5

201

Otro ejemplo (MCD de dos números):

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

25	5
5	5
1	

Puesto que no hay factores comunes no triviales, escribimos:

MCD = MFC = 1

En este caso, decimos que:

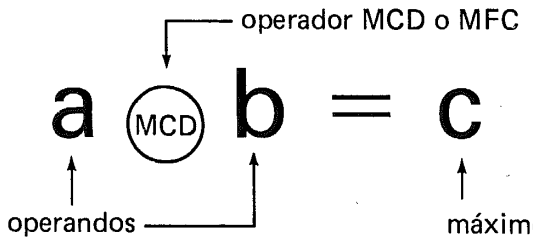
36 y 25 son **primos entre sí.**

202

Podemos hablar
de

la **operación binaria**

representada por:



203

Si ocurre que:

$$a \underset{MCD}{\circ} b \underset{MCD}{\circ} c \underset{MCD}{\circ} d \underset{MCD}{\circ} \ldots = 1$$

decimos que:

a,b,c,d, ... son **primos entre sí**

1.4.6.2

Práctica adicional
de
obtención
del máximo común divisor
o máximo factor común
de
dos o más números,
si se considera necesario.

1.4.6

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *descomponer* en factores primos un número compuesto dado;
- *determinar* el máximo común divisor o máximo factor común de dos o más números.

4.7

Múltiplo y mínimo común múltiplo

204

Si $a = n \times b$

$a \in \mathbb{N}$
$b \in \mathbb{N}$
$n \in \mathbb{N}$

decimos que:

a es múltiplo de b

205

Puesto que:

$12 = 3 \times 4$

podemos afirmar que:

12 es múltiplo de 3
o
12 es múltiplo de 4

206

Para determinar
el conjunto de los

múltiplos

de un número b,
se multiplica el número b
sucesivamente
por cada uno de los

números naturales.

207

Así,
el conjunto ordenado de los múltiplos de 3 es:

$M_3 = \lfloor \_\_\_\_\_ \rfloor$

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Conjunto ordenado de todos los naturales **divisibles por 3.**

$M_3 = \{ 0,3,6,9,12,15,18 \ldots \}$

208

El conjunto ordenado de los múltiplos de 5 es:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Conjunto ordenado de todos los naturales **divisibles por 5.**

$$M_5 = \{0,5,10,15,20,25\ldots\}$$

209

El conjunto ordenado de los múltiplos de 10 es:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Es el conjunto de todos los naturales **divisibles por 10.**

$$M_{10} = \{0,10,20,30,40,50\ldots\}$$

210

Conjunto ordenado de los múltiplos de 2:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Conjunto ordenado de los naturales **divisibles por 2.**
o
Conjunto de los **números naturales pares**

$$M_2 = \{0,2,4,6,8,10,12\ldots\}$$

211

Atención.

$$M_2 = \{0,2,4,6,8,10,12\ldots\}$$

Por comprensión, utilizando la notación descriptiva:

$$M_2 = \{2n/n \in \mathbb{N}\}$$

212

$$M_2 = \{2n/n \in \mathbb{Z}\}$$

Por extensión o enumeración de sus elementos:

Respuesta en el cuadro siguiente

Conjunto de números enteros pares:

$$M_2' = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}$$

o

$$M_2' = \{\ldots -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$$

213

Conjunto ordenado de los **números naturales impares** (no pares).

Por extensión:

Por comprensión:

Respuesta en el cuadro siguiente

El conjunto ordenado de los números naturales impares.

Por extensión:

$I = \{1,3,5,7,9,11,13,\ldots\}$

Por comprensión (dos formas posibles):

$I = \{x/x \in \mathbb{N} \text{ y } x \text{ es impar}\}$

$I = \{2n + 1/n \in \mathbb{N}\}$

si $2n$ es par, $2n + 1$ es impar

214

Conjunto de los enteros impares:

Por extensión:

$I' =$

Por comprensión:

$I' =$

Respuesta en el cuadro siguiente

El conjunto de los enteros impares.

$$I' = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \ldots\}$$

$$I' = \{2n + 1 / n \in \mathbb{Z}\}$$

215

Conjunto de los enteros múltiplos de 3.

Por comprensión:

Respuesta
en el
cuadro siguiente

Conjunto de los enteros múltiplos de 3.

$$M'_3 = \{3n / n \in \mathbb{Z}\}$$

216

El conjunto de los naturales múltiplos de 1.

Por extensión:

Respuesta en el cuadro siguiente

Conjunto de los naturales múltiplos de 1:

$$M_1 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,\ldots\} = \mathbb{N}$$

Todo número natural es múltiplo de 1.

217

El conjunto de los naturales múltiplos de 0.

Por extensión:

Respuesta en el cuadro siguiente

El conjunto de los naturales múltiplos de 0.

$$M_0 = \{0\}$$

218

Ahora bien,
sean 6 y 15 dos números naturales.

El conjunto ordenado de los múltiplos de 6, definido por extensión, es:

Respuesta en el cuadro siguiente

Conjunto ordenado de los múltiplos de 6:

$$M_6 = \{0,6,12,18,24,30,36,42,48,54,60,\ldots\}$$

219

Conjunto ordenado de los múltiplos de 15.

Por extensión:

$M_{15} = \{0, 15, 30, 45, 60, 75, \ldots\}$

220

$M_6 = \{0,6,12,18,24,30,36,42,48,54,60, \ldots\}$

$M_{15} = \{0,15,30,45,60,75, \ldots\}$

$M_6 \cap M_{15} =$

Respuesta en el cuadro siguiente

$M_6 = \{0,6,12,18,24,30,36,42,48,54,60, \ldots\}$

$M_{15} = \{0,15,30,45,60,75, \ldots\}$

$M_6 \cap M_{15} = \{0,30,60, \ldots\}$

A 30 se le llama: **Mínimo Común Múltiplo (mcm)** de 6 y 15.

221

Mínimo Común Múltiplo (mcm)

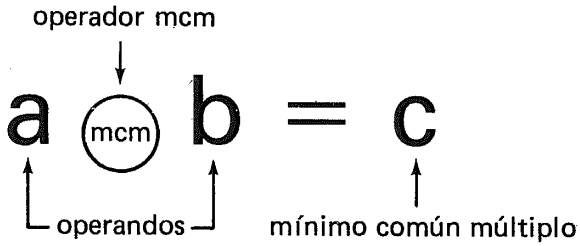
de dos números, es el

menor elemento diferente de cero

del conjunto ordenado
de los múltiplos comunes de los dos números.

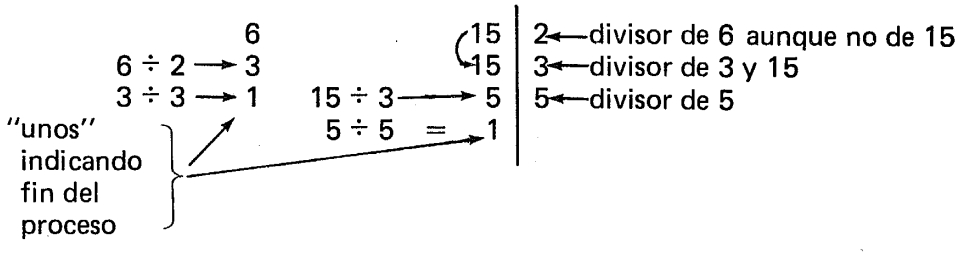
222

Podemos hablar de la operación binaria
representada por:



223

Estudiemos con atención el siguiente
procedimiento rápido para la determinación del
mínimo común múltiplo (mcm) de dos números.



• 2 × 3 × 5 = (30) mcm

224

Determinación del mcm de 5, 7 y 15.

5	7	15	5
1	7	3	3
	7	1	7
	1		

mcm = 105

$5 \times 3 \times 7 = 105$

225

Determinación del mcm de 6 y 7.

6	7	3	
2	7	2	
1	7	7	
	1		

mcm = 42

$3 \times 2 \times 7 = 6 \times 7$

Cuando los números son **primos entre sí**, el mcm es el producto de los números.

226

Si sucede que:

$$a \overset{mcm}{\bigcirc} b \overset{mcm}{\bigcirc} c \overset{mcm}{\bigcirc} \ldots = a \times b \times c \times \ldots$$

decimos que:

a,b,c,... son primos entre sí.

1.4.7.1.

Práctica adicional
de
determinación
del
mínimo común múltiplo
de dos o más números,
si se considera necesario.

1.4.7

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

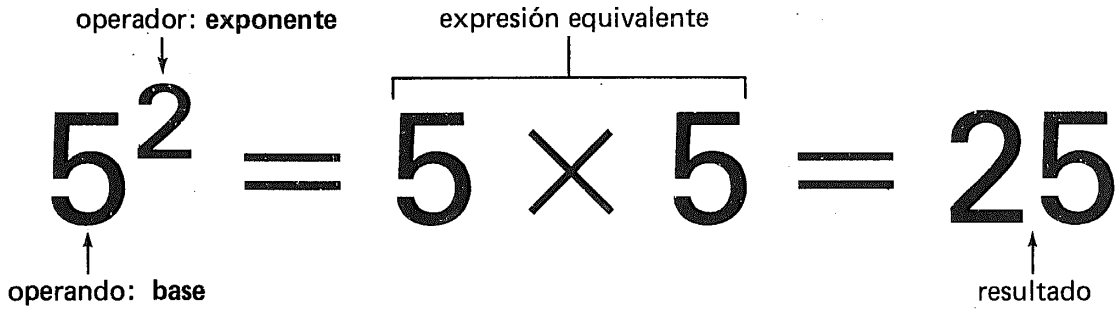
- *determinar* el conjunto de los múltiplos de un número dado;
- *determinar* el mínimo común múltiplo de dos o más números.

4.8

Potenciación y radicación en $\mathbb{Z}$

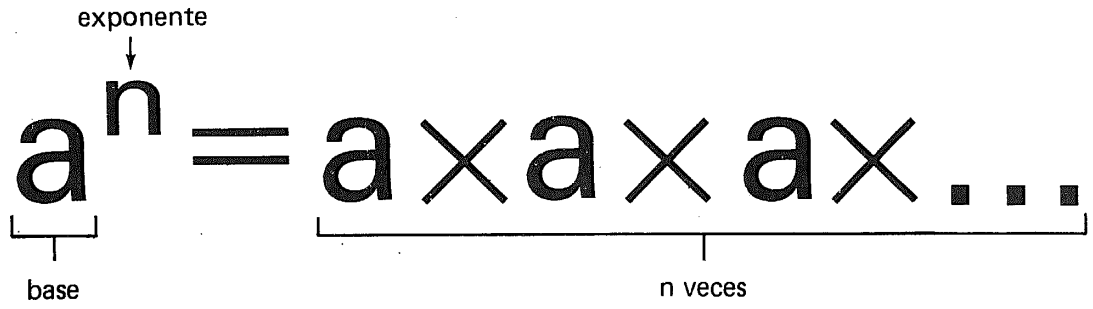
227

La **potenciación** es una operación **unaria** (o monaria)



228

En general, para $n \in \mathbb{Z}^+$



229

$5^1 = \_\_\_\_\_$

5^1 se lee:

"cinco a la primera potencia"

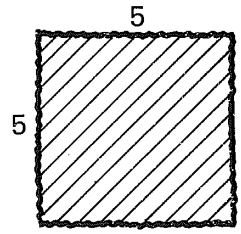
5

230

$5^2 = \_\_\_\_\_$

5^2 se lee:

"cinco a la segunda potencia"
o
"cinco al cuadrado."



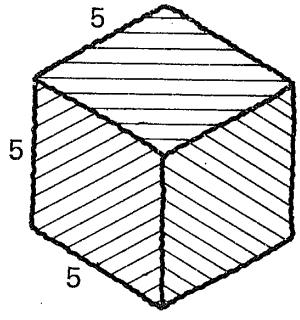
$5 \times 5 = 25$

231

$5^3 = \_\_\_\_\_$

5^3 se lee:

"cinco a la tercera potencia"
o
"cinco al cubo."



$5 \times 5 \times 5 = 125$

232

$5^4 =$ ____

5^4 se lee:

"cinco a la cuarta potencia."

$5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$

233

$1^1 =$ ____

1

234

$1^2 =$ ____

$1 \times 1 = 1$

235

$1^3 = \square$

$1 \times 1 \times 1 = 1$

236

$1^n = \square$

$n \in \mathbb{Z}^+$

$\underbrace{1 \times 1 \times 1 \times \ldots}_{n \text{ veces}} \times 1 = 1$

237

$0^1 = \square$

0

238

$0^2 = \square$

$0 \times 0 = 0$

239

$0^n = \square$

$n \in \mathbb{Z}^+$

$\underbrace{0 \times 0 \times 0 \times \ldots \times 0}_{n \text{ veces}} = 0$

240

$(-1)^1 = \square$

-1

241

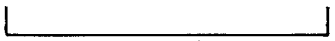
$(-1) \times (-1) = 1$

242

$(-1)^3 =$

$(-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

243

$(-1)^4 =$ 

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$

244

$(-5)^4 = \underline{\quad\quad}$

625

1.4.8.1

Práctica
adicional
de
cálculo de
potencias pares o impares
de
números negativos,
si se considera necesario.

245

La radicación
es
la

operación unaria (o monaria)

inversa
de
la

potenciación.

246

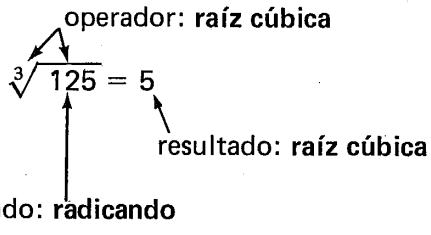
Si

$$5^3 = 125$$

entonces

$$\sqrt[3]{125} = 5$$

247

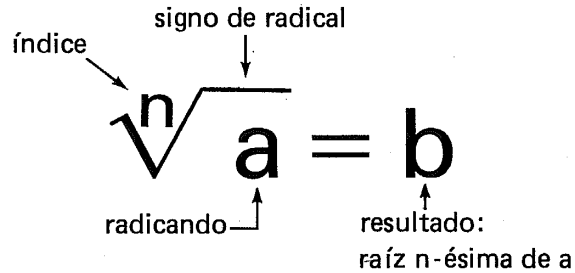


$\sqrt[3]{125}$ se lee:

"la raíz cúbica de 125."

248

En general, escribimos:



y se verifica que

$$b^n = a$$

249

índice 2 sobreentendido

$\sqrt{a} = b$

Se lee:

"La raíz cuadrada de a es igual a b."

250

Más adelante tendremos la oportunidad de estudiar con detalle las operaciones de potenciación y radicación.

1.4.8

En este punto, el alumno debe ser capaz de

- *interpretar* la potenciación como una operación unaria o monaria, definida en el conjunto de los enteros;
- *determinar* potencias pares o impares de números enteros dados;
- *interpretar* la radicación como una operación unaria o monaria no definida en el conjunto de los enteros.